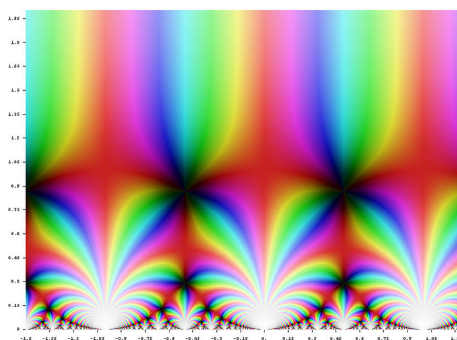


Seminar „Borcherdsprodukte“

Jun.-Prof. Dr. Claudia Alfes-Neumann

Sommersemester 2019



Die j -Invariante auf der oberen Halbebene

Inhalt

Modulformen sind holomorphe Funktionen auf der oberen komplexen Halbebene, die gewisse Symmetrien erfüllen. Unter der Operation der Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} : ad - bc = 1 \right\}$ transformiert eine Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Weiterhin erfüllen solche Formen eine bestimmte Wachstumsbedingung in der *Spitze* ∞ und besitzen dadurch eine Fourierentwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}$$

mit Koeffizienten $a(n) \in \mathbb{C}$.

1998 hat Borcherds eine Korrespondenz zwischen schwach holomorphen Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ mit ganzzahligen Koeffizienten und meromorphen Modulformen aufgestellt¹. Ziel des Seminars ist es, diese Korrespondenz in einem speziellen Fall zu verstehen. Die Korrespondenz ordnet einer Modulform zu $SL_2(\mathbb{Z})$ eine meromorphe Modulform zu, die als unendliches Produkt, dem *Borcherdsprodukt*, gegeben ist.

Zu Beginn sollen die notwendigen Grundlagen aus der Theorie der Modulformen und Hecke-Operatoren, sowie die Grundzüge der Theorie der *Komplexen Multiplikation* eingeführt werden.

In seiner Arbeit *Traces of singular moduli* arbeitet Zagier Borcherds' Theorem in einem Spezialfall aus. Zunächst sollen die notwendigen Ergebnisse über die Spuren singulärer Moduli (Werte der j -Invariante, einer speziellen Modulform, an irrational-quadratischen Punkten)

¹*Schwach holomorph* bedeutet hierbei, dass man in ∞ einen Pol endlicher Ordnung erlaubt und *meromorph* bedeutet, dass Pole auf der oberen Halbebene erlaubt sind.

vorgestellt werden. Danach wird Borcherds' Theorem in diesem (speziellen) Fall sowie der Beweis vorgestellt.

Am Ende wird es noch einen Ausblick auf die allgemeine Formulierung von Borcherds' Korrespondenz und Anwendungen in der aktuellen Forschung geben.

Literatur

- [BGHZ08] BRUINIER, Jan H. ; GEER, Gerard van d. ; HARDER, Günter ; ZAGIER, Don: *The 1-2-3 of modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 2008 (Universitext). – Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004, Edited by Kristian Ranestad
- [KK07] KOECHER, Max ; KRIEG, Aloys: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. revised. Springer-Verlag, Berlin, 2007
- [Zag02] ZAGIER, Don: Traces of singular moduli. In: *Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998)* Bd. 3. Int. Press, Somerville, MA, 2002, S. 211–244

Vorraussetzungen

Das Seminar richtet sich vorrangig an Studierende im Master Mathematik oder Technomathematik. Bei Interesse gibt es aber auch Vorträge, die für Bachelorstudierende dieser Studiengänge geeignet sind. Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse der Grundvorlesungen, insbesondere der Funktionentheorie und der Algebra. Dieses Seminar baut auf der Vorlesung „Automorphe Formen“ auf. Die notwendigen Grundlagen werden aber auch in den ersten Vorträgen wiederholt. Die Teilnahme an der Vorlesung „Automorphe Formen“ ist also keine Voraussetzung für die Teilnahme am Seminar.

Termine

Das Seminar findet Montags, 14-16h statt (der Raum wird noch bekannt gegeben).

Eine Vorbesprechung findet am **Dienstag, 29. Januar 2019, 11h**, statt. Sollten Sie an diesem Termin verhindert sein, aber trotzdem Interesse haben, melden Sie sich gerne per Email.

Kontakt

Jun.-Prof. Dr. Claudia Alfes-Neumann, alfes@math.uni-paderborn.de